

文章编号: 1000-7598-(2004) 02-0199-04

固结问题的非线性局部点插值法解研究

王志亮¹, 禹 峰², 殷宗泽¹

(1. 河海大学 土木工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 安徽省电力设计院, 安徽 合肥 230022)

摘 要: 局部点插值法是一种新型的无单元法, 该法构造出的位移和孔隙水压力的形函数具有 δ 函数特性, 所以, 本质边界条件很易处理。首先, 介绍了基本理论, 给出求解比奥固结问题的主要公式。其次, 对复层软基堆载引起的固结和沉降问题作了计算, 其中节点采用均匀分布方式, 且为了考虑土体的非线性特性计算程序中耦合了邓肯-张模型。最后, 把计算值与有限元法、一维固结理论计算结果进行了对比。结果表明该法精度高, 令人满意。

关 键 词: 局部点插值法; 邓肯-张模型; 固结和沉降; 一维固结理论

中图分类号: TB 115; TU 471.8

文献标识码: A

Study on calculation of consolidation problem using nonlinear local point interpolation method

WANG Zhi-liang¹, YU Feng², YIN Zong-ze¹

(1. College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. Anhui Design Institute of Electric Power, Hefei 230022, China)

Abstract: Local point interpolation method is a new type meshless method. Because its shape functions for displacements and pore water pressures possess delta function property, the essential boundary conditions can be imposed easily. After the basic theory is introduced and the main equations for solving Biot's consolidation problem are developed, the consolidation and settlement of one multi-layer soft ground subjected to heaped loadings are calculated with it. Furthermore, the famous Duncan-Chang model is adopted in consideration of nonlinear properties of soil, and the uniform point distribution mode is selected. At last, comparisons with the results of one-dimensional consolidation method and FEM show that this method is more accurate and satisfying.

Key words: local point interpolation method; Duncan-Chang model; consolidation and settlement; 1-D consolidation theory

1 引 言

近些年来, 无单元法的应用取得了长足的发展。相继出现了离散单元法 (DEM)^[1]、无单元伽辽金法 (EFG)^[2]、再生核质点法 (PKP)^[3] 等等。本文在 Liu, Gu 和 Wang (2001 年)^[4-7] 等提出了点插值法 (PIM) 的基础上, 采用其非线性求解软基堆载引起的固结和沉降问题, 取得令人满意的结果, 也为路基、堤坝等类似问题提供了求解新思路。

2 平面应变比奥固结理论

2.1 基本理论

饱和土是由土颗粒骨架和孔隙水构成的, 这两个系统相互作用, 比奥固结理论对此提供了一个宏观的理解。著名的比奥固结方程主要由土体的平衡

方程和连续性方程组成^[8], 一般文献均有介绍, 此处不再赘述。

2.2 边界条件

此类问题的边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u}, & \text{on } \Gamma_u \\ p &= \bar{p}, & \text{on } \Gamma_p \\ \sigma \hat{n} &= \bar{t}, & \text{on } \Gamma_\sigma \\ \frac{K_{ij}}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial x_j} &= \bar{q}_i, & \text{on } \Gamma_q \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $\bar{q}$, $\bar{t}$ 分别为确定的边界上的孔隙水流量、表面张力值, $\bar{u}$, $\bar{p}$ 分别为边界位移和边界孔压值; $\hat{n}$ 为边界 Γ 和场 Ω 上的单位法向矢量, K_{ij} 为渗透系数张量。

2.3 初始条件

对于场 Ω 中任意 x , 在初始时刻 $t=0$ 有:

收稿日期: 2002-10-05

作者简介: 王志亮, 男, 1969 年生, 博士研究生, 主要从事土体本构关系与软基处理方面研究。

$$\left. \begin{aligned} u_i(x, t) &= u_0(x); \\ p_i(x, t) &= p_0(x) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

2.4 变分方程

用 δw 和 δv_i 分别表示孔压和位移增量, 平衡方程和连续性方程的加权残值形式为^[7-9]

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \delta v_i \left(\frac{\partial \Delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \Delta b_i \right) d\Omega &= 0; \\ \int_{\Omega} \delta w \left(\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial t} \right) \right) d\Omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

分步积分并应用格林公式, 可得到最终形式:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \delta \varepsilon_{ij} \}^T \{ \Delta \sigma'_{ij} \} d\Omega - \int_{\Omega} \{ \delta v_{i,i} \}^T \{ \Delta p \} d\Omega + \\ \int_{\Omega} \{ \delta v_i \}^T \{ \Delta b_i \} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \{ \delta v_i \}^T \{ n_i \} \Delta p d\Gamma &= 0; \\ \int_{\Omega} \{ \delta w \} \{ \Delta \dot{u}_{i,i} \} d\Omega - \frac{1}{\gamma_w} \int_{\Omega} \{ \delta w_i \}^T [K_{ij}] \{ \Delta p_j \} d\Omega + \\ \int_{\Gamma_q} \{ \delta w \} \{ n_i \} \{ \bar{q}_i \} d\Gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\text{式中 } \Delta \dot{u} = \frac{\partial \Delta u}{\partial t}; \quad (*),_j = \frac{\partial (*)}{\partial x_j}.$$

时间积分方案一般表达如下:

$$\int_t^{t+\Delta t} f(t) dt = \Delta t [\theta f(t) + (1-\theta) f(t+\Delta t)] \quad (5)$$

式中 $0 \leq \theta \leq 1$ 。

3 局部点插值法基本内容^[4-7]

在局部点插值法中, 计算域是用一系列点来离散的, 每个点都有一定的影响域 (Influencing domain), 某特定节点处的位移, 是通过对该点的影响域中的其它点位移进行插值而得到。设场 Ω 中一函数 $u(x)$, 局部点插值法通过点 x_Q 的各相邻节点进行多项式插值得到其近似函数为

$$u(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n p_i(x) a_i(x_Q) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x_Q) \quad (6)$$

式中 n 为点 x_Q 的相邻节点数; $p_i(x)$ 在二维坐标系中为单项式, 可以通过著名的帕斯卡三角形^[10]构造出, 在二维场中表示为

$$\mathbf{p}^T(x) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad \cdots] \quad (7)$$

这就是局部点插值法所用的基函数。

$a_i(x_Q)$ 是 $p_i(x)$ 的系数, 它可以让插值函数 $u(x, x_Q)$ 通过所有的 n 个分散的节点求得。在第 i 点处插值函数可表示为

$$u_i = \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (8)$$

式中 u_i 是 u 在 $x = x_i$ 时的值。

式 (8) 有

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{p}_Q \mathbf{a} \quad (9)$$

$$\text{式中 } \left. \begin{aligned} \mathbf{u}^* &= [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]^T; \\ \mathbf{p}_Q^T &= [\mathbf{p}(x_1) \quad \mathbf{p}(x_2) \quad \cdots \quad \mathbf{p}(x_n)] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\text{根据式 (9) 有 } \mathbf{a} = \mathbf{p}_Q^{-1} \mathbf{u}^* \quad (11)$$

将式 (11) 带入式 (6) 有

$$u(x, x_Q) = (\mathbf{p}^T(x) \mathbf{p}_Q^{-1}) \mathbf{u}^* = \phi(x) \mathbf{u}^* \quad (12)$$

式中 $\phi(x)$ 为局部点插值法构造出的形函数, 其矩阵式如下:

$$\phi(x) = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \cdots \quad \phi_i(x) \quad \cdots \quad \phi_n(x)] \quad (13)$$

针对本文固结问题, 孔隙水压力和位移形函数阶数相同, 形式一样, 分别表示如下:

$$\left. \begin{aligned} \phi_u(x) &= [\phi_{u_1}(x) \quad \phi_{u_2}(x) \quad \cdots \quad \phi_{u_i}(x) \quad \cdots \quad \phi_{u_n}(x)]; \\ \phi_p(x) &= [\phi_{p_1}(x) \quad \phi_{p_2}(x) \quad \cdots \quad \phi_{p_i}(x) \quad \cdots \quad \phi_{p_n}(x)] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

为了保证式 (11) 中 $\mathbf{p}_Q^{-1}$ 的存在, 本程序中采用了文献[6, 7]的坐标转换法, 先在局部坐标中求得形函数导数再变化到全局坐标系中。

4 计算模型

为了考虑土体的非线性, 本文选用了著名的 Duncan-Chang 模型, 主要公式如下^[8]:

加载时:

$$\left. \begin{aligned} E &= Kpa \left(\frac{\sigma_3}{pa} \right)^n \left[1 - \frac{R_f(1-\sin\phi)(\sigma_1-\sigma_3)}{2C \cos\phi + 2\sigma_3 \sin\phi} \right]^2; \\ \mu &= \frac{G - F \lg(\frac{\sigma_3}{pa})}{(1-D\varpi)^2}; \\ \varpi &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{Kpa \left(\frac{\sigma_3}{pa} \right)^n \left[1 - \frac{R_f(1-\sin\phi)(\sigma_1-\sigma_3)}{2C \cos\phi + 2\sigma_3 \sin\phi} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

卸载时:

$$E_{ur} = K_{ur} pa \left(\frac{\sigma_3}{pa} \right)^{n_0} \quad (16)$$

该模型包含了 8 个计算参数: c, ϕ, k, R_f, n, G, F 和 D 。各参数以及式 (15), (16) 中各符号具体含义此处不再赘述^[8]。

5 实例计算

某软土地基的典型地质剖面见图1。有3层天然土层：0~2.2 m为灰色粉质粘土；2.2~25.8 m为淤泥夹少许粉土、粉砂等；25.8~30.0 m为灰白色粉质粘土。为了对该软基进行处理，地表中心区域内有用来预压的填土堆载。设填土是一次性施加的，重度为 20.0 kN/m^3 ，高度为1.5 m，顶、底宽均为38.7 m。计算中作了简化处理，把填土重力荷载折算成面力荷载作用在地基相应结点上。

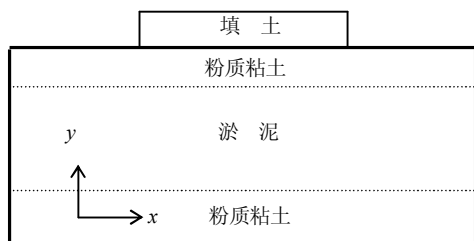


图1 平面应变固结问题

Fig.1 The problem of plane strain consolidation

这属于平面应变固结问题，非线性局部点插值法主要计算参数见表1。根据分层总和法可知实际

沉降计算深度在25.1 m。为了满足位移等边界条件，计算域长度取为80.0 m，深度取为30.0 m。笔者认为，地表及计算域两侧为透水性边界，底部为不透水性边界；且计算域两侧及底部的 x, y 方向位移约束到零，并设地下水位在地表处。计算域内节点具体设置状况见图2，整个计算域内共设置了713个节点，各层土中的节点分布密度不同，第1、3层土因厚度小，节点布置得较密；第2层淤泥土厚度达23.6 m，故节点安排得较稀疏些。同时，还选取了4个节点作为计算中的参考点，点号及坐标为：585(46.0, 28.9)，316(46.0, 16.0)，441(55.5, 24.0)，698(40, 30)。

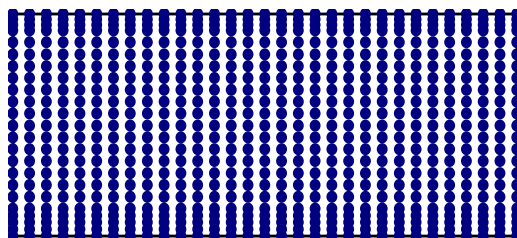


图2 计算域内均匀节点分布图

Fig.2 Uniform arrangement of nodes in calculation region

表1 非线性计算参数表

Table 1 Nonlinear calculation parameters

土层 编号	γ / $\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$	ϕ / $(^\circ)$	c / kPa	模型参数						K_x, K_y / $\text{cm} \cdot \text{d}^{-1}$
				R_f	k	n	G	F	D	
1	9.3	15.2	61.8	0.79	134.4	0.36	0.31	0.04	2.01	0.040
2	8.6	18.35	13.6	0.95	95.7	0.46	0.29	0.23	1.10	0.018
3	9.0	18.9	42.1	0.76	127.5	0.59	0.30	0.10	4.51	0.035

局部点插值法基本计算步骤如下：(1) 确定计算域，布置结点和背景网格，设定基函数；(2) 对背景网格循环，寻找高斯点并对高斯点循环，找出各高斯点处的相邻结点，同时构造出相应结点处的形函数；(3) 组装系统刚度矩阵和荷载列向量；(4) 求解系统方程得出位移、应变和应力，并根据相应标准进行高斯点处应力的修正；(5) 计算结束。

为了比较，同时进行了非线性有限元计算，它是采用耦合了非线性模型的Crisp软件^[11]完成的。

图3是用本文方法得出点698(40.0, 30.0)处(即填土堆载中心线上原地面点)的沉降变化曲线。由图可见，非线性局部点插值法计算结果与有限元法吻合较好，二者均能对沉降的发展趋势进行很好的计算，但它们都比分层总和法结合一维固结理论计算值要大，这是因为后者没有考虑

侧向变形所引起的沉降，故计算得出的沉降量偏小；而本文方法以及有限元法均是以二维固结理论为基础的，计算中考虑了应力历史的影响，同时，又计及侧向变形、土体的非线性等，故计算结果较接近实际。

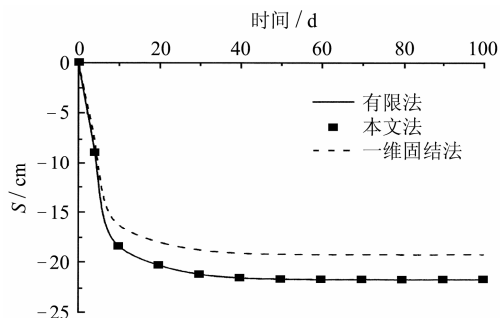


图3 地面填土中心(点698)处沉降曲线

Fig.3 Settlement curve of surface at point 698

图 4 显示了 3 个不同节点处超孔隙水压力（图中用 P 表示）在 100 d 内的消散曲线，可见非线性局部点插值法与有限元法解也是高度吻合的。

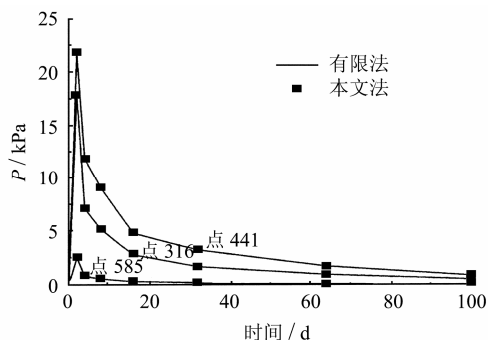


图 4 孔隙水压力消散曲线

Fig. 4 Dissipation curves of excess pore water pressure at different points

孔隙水压力的初始峰值来源于填土堆载的施加，后来各点的超孔隙水压力都随时间延长逐渐地消散。由于点 316、441 均位于含水率较高淤泥层中，故初始峰值较点 585 明显的高，但孔隙水压力随时间消散比点 585 慢。点 585 只要 1 个月左右超孔压为 0，而点 316 和 441 则需要 3 个多月的时间。其中，点 441 的孔压值大于 316 点，是因为前者在计算域中所处的位置要高些，受填土荷载影响较大。

图 5 是采用局部点插值法得出的堆载后第 24 d 的地基内沉降等值线，堆载区域下的沉降绝对值随深度变大而减小，堆载区域两侧沉降呈对称发展，且随离中心距离的增大沉降绝对值也减小，可见本例中所取的计算深度和宽度是可行的。堆载中心点处沉降值最大，第 24 d 时沉降约为 20 cm。

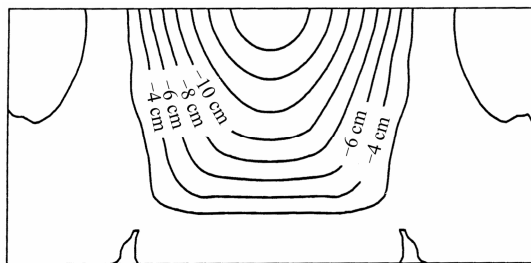


图 5 第 24 d 地基沉降等值线图

Fig. 5 Settlement isolines of foundation after 24 days

6 结 语

(1) 局部点插值法是新型的无单元法，前、后处理均较有限元法简单，其只需要节点的相关信息，不必将节点连成单元。此外，它计算出的是节点处应力等，这样，可方便地进行应力等值线绘制等后处理。

(2) 本文考虑到土体的非线性特性，提出非线性局部点插值法，把邓肯-张模型引入到本文无单元中，计算结果和非线性有限元法十分接近。

(3) 局部点插值法是基于比奥固结理论的，它能考虑土的应力历史影响、侧向变形等问题，所以比基于一维固结理论中的计算结果更接近实际。

参 考 文 献

- [1] Nayroles B, Touzot G. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements [J]. *Computational Mechanics*, 1992, (10): 307—318.
- [2] Belytschko T, Lu Y Y. Element free galerkin method [J]. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 1994, 37: 229—256.
- [3] Liu W K, Jun S. Reproducing kernel particle methods [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 20: 1 081—1 106.
- [4] Gu Y T, Liu G R. A local point interpolation method for stress analysis of two-dimensional solids [J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2001, (2): 221—236.
- [5] Gu Y T, Liu G R. A local point interpolation method for static and dynamic analysis of thin beams [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190: 5 515—5 528.
- [6] Liu G R, GU Y T. A point interpolation method for two-dimensional solids [J]. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 2001, 20: 937—951.
- [7] Wang J G, Gu Y T, Liu G R. A point interpolation method or simulating dissipation process of consolidation [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 19: 5 907—5 922.
- [8] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理和计算[M]. 北京:中国水利水电出版社, 1995, 44—250.
- [9] Karim M R, Wang J G. Element free galerkin method: A meshless discretization approach in consolidation analysis. *Computational Mechanics*[J]. *Proceedings*, 2001, 953—958.
- [10] Zienkiewicz O C, Taylor R L. The Finite Element Method[M]. New York: McGraw-Hill, 1991, (2):111—200.
- [11] Britto A M, Gunn M J. Critical State Soil Mechanics Via Finite Elements [M]. Chichester: Ellis Horwood Limited, 1987, 150—357.